Exercice 1

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\Pi = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Calculer $\det(\Pi)$ en fct de m, puis en déduire le rang Π.

$$\det M = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & m & 2m \\ 0 & m & 1 & 0 \\ m & 2m+2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m & m \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ m & 2m+2 & 2-m^2 & 1-2m^2 \\ 0 & 0 & m & m \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la 1ère ligne

$$\det(\Pi) = - \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 2m+2 & -m^2 & 1-2m^2 \\ 0 & m & m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -m^2 & 2m+2 & 1-2m^2 \\ m & 0 & m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m^2 & m^2+2m+2 & 1-2m^2 \\ m & -m^2 & m \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la 1ère ligne

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m^2+2m+2 & 1-2m^2 \\ -m^2 & m \end{vmatrix}$$

$$= m^4 + 2m^3 + 2m + m^2 - 2m^2$$

$$= m^4 + 3m^2 + 2m$$

$$= m(m^3 - 3m + 2)$$

$$= m(m-2)(m-1)^2$$

Si $m \neq 0$ et $m \neq 2$ et $m \neq -1$ alors $\det(\Pi) \neq 0$ c'à d. Π est inversible donc $\operatorname{rang} \Pi = 4$

Si $m = 0$ ou $m = 2$ ou $m = 1$

alors on a

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 2m+2 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ -m^2 & 2m+2 & m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m \\ -m^2 & 2m+2 \end{vmatrix} = 2m + 2 + m^3 \neq 0$$

car $0, -1, 2$ ne sont pas des racines

donc 3 un mineur d'ordre 3 non nul

d'où $\operatorname{rang} \Pi = 3$.

Exercice 2

soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1- Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

on a $|P| = \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

donc P est inversible

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t(\operatorname{com}(P))$$

Scanné avec CamScanner

ona $\text{Com}P = \begin{pmatrix} (-1)^2 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} & (-1)^3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (-1)^3 1 & (-1)^4 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $^t\text{Com}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

2) Expliciter $D = P^{-1}MP$, puis calculer D^n et M^n $\forall n \in \mathbb{N}$.

ona $D = P^{-1}MP$.

$= \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ona $D^2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^2 & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^2 \end{pmatrix}$

on montre par récurrence que

$D^n = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$.

on suppose que $D^n = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$

ona $D^{n+1} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

donc $D^{n+1} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^{n+1} & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^{n+1} \end{pmatrix}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $D^n = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$

Calculons M^n.

$D = P^{-1}MP$.

donc $PD = PP^{-1}MP$

donc $PD = IMP = MP$

donc $PMP^{-1} = MPP^{-1} = MI = M$

donc $M = PDP^{-1}$

ona $M^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})$

$= PD(P^{-1}P)DP^{-1}$

$= PD^2P^{-1}$

Par récurrence on montre que

$M^n = PD^nP^{-1}$.

on suppose que $M^n = PD^nP^{-1}$.

et on montre pour $n+1$.

ona donc $M^n = PD^nP^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} & \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n - \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n}{2} \\ \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n - \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n}{2} & \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

3) soient (U_n) et (V_n) les suites réelles définies par les relations de récurrence $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = U_n + V_n \end{cases}$

En utilisant les questions précédentes, exprimer U_n et V_n en fct de U_0, V_0 et n.

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

$W_{n+1} = n W_n$.

donc (W_n) est une suite géométrique de raison M.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $W_n = w_n = \Pi^n w_0$

$$W_n = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} & \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n - \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n}{2} \\ \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n - \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n}{4} & \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

a b c d

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 a + V_0 b \\ U_0 c + V_0 d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} U_n = U_0 a + V_0 b \\ V_n = U_0 c + V_0 d \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer les déterminants

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -11 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & -2 & -27 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-2 \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & -27 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -2 \times 20 - 3 \times 118 = 394$$

Scanné avec CamScanner

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & a & -a & c-b \\ 0 & b & c-a & -b \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -a & c-b \\ b & c-a & -b \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -2a & c-b-a \\ b & c-a-b & -2b \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -2a & c-b-a \\ b & c-a-b & -2b \end{vmatrix}$$

$$= -4ab + (c-a-b)(c-a-b)$$

D_n : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

on developpe par rapport à la 1ère ligne

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 0 & & a_{n-1} \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ a_n & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n D_{n-1}$$
$$D_{n-1} = (-1)^{n} a_{n-1} D_{n-2}$$
$$D_{n-2} = (-1)^{n-1} a_{n-2} D_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$D_2 = (-1)^{3} a_2 D_1$$
$$D_1 = a_1$$

donc $D_n = (-1)^{((n+1)+(n)+(n-1)\cdots 3)} \times a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1$

donc $D_n = \prod_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

1) Mq $\chi_n : \alpha \mapsto \det(\alpha I_n - M)$ est une fct polynôme de degré n.

on a $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$

$M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$

on a $\alpha I_n - M = (\alpha \delta_{i,j} - m_{i,j})$

par définition on a

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$$

donc $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} (\alpha \delta_{i,j} - m_{i,j})$

$= \det(\alpha I_n - M) = \chi_n(\alpha)$

donc χ_n est la somme de $\mathbb{K}_n[X]$

donc $\chi_n(X) \in \mathbb{K}_n[X]$.

donc χ_n est une fct polynôme de degré n.

2) Déterminer son terme de plus haut degré et son terme constant.

Les termes de degré n sont les termes de degré n dans $\prod_{i=1}^{n} (\alpha \delta_{i,j} - m_{i,j})$

obtenus pour $\sigma \in S_n$ / $\forall \sigma(i) = i$

$\forall i \in [1, n]$ càd $\sigma = id_{[1,n]}$

Scanné avec CamScanner

càd $(\forall N \in \mathbb{N}^*)(\exists k \geq N) / \alpha_n\left(\frac{1}{k}\right) = 0$

donc la fct polynôme $\chi_n(x)$ admet une infinité de racines

absurde

donc pour k assez grand $M - \frac{1}{k} I_n$ est inversible.

Remarque : Toute matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{K})$ est limité d'une suite de matrices inversibles on dit que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.

Rappels : soit (U_n) une suite vérifiant $\begin{cases} U_1, U_2 \\ U_n = \alpha U_{n-1} + \beta U_{n-2} \end{cases}$

(U_n) s'appelle une suite linéaire d'ordre 2 ~~l'équation~~ d'éq $x^2 = \alpha x + \beta$

si a et b sont les solutions de l'équation alors $\exists \mu, \lambda / \forall n \in \mathbb{N}^*$

$U_n = \lambda a^n + \mu b^n$.

Pour déterminer μ et λ

on résoud le système $\begin{cases} \lambda a^1 + \mu b^1 = U_1 \\ \lambda a^2 + \mu b^2 = U_2 \end{cases}$

Soit

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

1) Mq $(\forall n \geq 4)$ $B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$

$$= \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & 0 \\ b & a+b & a & \vdots \\ 0 & b & a+b & a \\ \vdots & 0 & b & a+b \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix}$$

on développe par rapport à la 1ère ligne

$$= (a+b)\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= \quad -b \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)B_{n-1} - ba \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & & & \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & a \\ 0 & 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

$= (a+b)B_{n-1} - ab\, B_{n-2}$.

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$

2 - En déduire que $\mathcal{B}_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

On a $B_n = = (a+b)B_{n-1} - ba\,B_{n-2}$

donc $\mathcal{B}_n$ est une suite linéaire d'ordre 2 son polynôme caractéristique est $x^2 - (a+b)x + ab = 0$

$\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$

$x_1 = \dfrac{a+b+a-b}{2} = a$

$x_2 = \dfrac{a+b-a+b}{2} = b$

donc $\mathcal{B}_n = \mu a^n + \nu b^n$

Scanné avec CamScanner

Si $n=2$

$$B_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^2 - ab = a^2+b^2+ab$$

Si $n=3$

$$B_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^3 + a + 0 - ab(a+b) - ab(a+b) - 0 = a^3+b^3+a^2b+ab^2$$

donc $\begin{cases} ua^2+vb^2 = a^2+b^2+ab \\ ua^3+vb^3 = a^3+b^3+a^2b+ab^2 = a+b(n-1) \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} ua^2+vb^2 = a^2+b^2+ab \\ v(b^2-ab^2) = b^3-ab^2+ab^2-a^2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b^2(b-a)v = b^3$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{b}{b-a} \quad ; b \neq a$$

$L_2 \leftarrow L_2 - bL_1$

$$\begin{cases} ua^2+vb^2 = a^2+b^2+ab \\ u(a^3-a^2b) = a^3+b^3+a^2b+ab^2 - a^2b - b^3 - ab^2 \\ \qquad = a^3 \end{cases}$$

$$u = \frac{a}{a-b}$$

donc $\forall n \geq 2$

$$B_n = \frac{a}{a-b}a^n + \frac{b}{b-a}b^n$$

$$= \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

Exercice 6

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ & b & & \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \dots L_n = L_1 + \sum_{i=2} L_i$

$$= \begin{vmatrix} a+b(n-1) & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & b & b \\ \vdots & b & \ddots & \vdots \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots \\ & & & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$L_i \leftarrow L_i - bL_1$

$$D_n = a+b(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+b(n-1)](a-b)^{n-1}.$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $a_1, a_2, \dots a_n$ des complexes et $k \in [0,n]$

Calculer :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \dots & a_2^n \\ & & & & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Rappel : Rappel de Vandermonde

1) $V(a_1, a_2, \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$$V(a_1,a_2)=\begin{vmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\end{vmatrix}$$

$$V(a_1,a_2,a_3)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2\\ 1 & a_2 & a_2^2\\ 1 & a_3 & a_3^2\end{vmatrix}$$

$$=(a_3-a_2)(a-a_1)(a-a_2)$$

$$\to (X-a_1)(X-a_2)=X^2-(a_1+a_2)X+a_1a_2$$

$$=\sigma_0X^2-\sigma_1X+\sigma_2.$$

tq $\sigma_0=1$

$\sigma_1=a_1+a_2$

$\sigma_2=a_1a_2$

$$\to (X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)$$

$$=X^3-(a_1+a_2+a_3)X^2-(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)X-a_1a_2a_3.$$

tq $\sigma_0=1$

$\sigma_1=a_1+a_2+a_3$

$\sigma_2=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$.

En général : $\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\sigma_i X^{n-i}$

où $\sigma_0=1$.

$\sigma_1=a_1+a_2+\dots+a_n$

$\sigma_2=a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_{n-1}a_n$

$\sigma_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}$

$\sigma_n=a_1a_2\dots a_n=\prod_{i=1}^{n}a_i$

on calcule $\mathcal{D}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^{k-1} & a_1^{n-1} & a_1^n\\ 1 & a_2 & a_2^{k-1} & a_2^{n-1} & a_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^{k-1} & a_n^{n-1} & a_n^n\end{vmatrix}$

Considérons

$$P=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^n\\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^n\\ 1 & X & X^2 & X^n\end{vmatrix}$$

$$=V(a_1,a_2\dots a_n,X)$$

ona P est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est :

$$\mathcal{D}_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=V(a_1,a_2\dots a_n)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

En développant P selon la dernière ligne

ona $P=\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{(n+1)+j}\mathcal{D}_j X^{j-1}$.

ona $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{n+1}$.

or $P=\lambda\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$

où $\lambda=(a_1,a_2\dots,a_n)$

donc $P=V(a_1,a_2\dots,a_n)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{n-i}X^i$

Par identification

ona $\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}\mathcal{D}_j X^{j-1}$

$=V(a_1,a_2\dots a_n)\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\sigma_{n-i}X^i$

en identifiant le terme en X^k dans les formules :

ona $(-1)^{n+1+k+1}\mathcal{D}_{k+1}=V(a_1,a_2\dots a_n)(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$.

donc $(-1)^{n+k}\mathcal{D}=V(a_1,a_2\dots a_n)(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$

donc $\mathcal{D}=(-1)^{n-k+n-k}\sigma_{n-k}V(a_1,a_2\dots,a_n)$

$=\sigma_{n-k}V(a_1,a_2\dots,a_n)$

$\mathcal{D}=\sigma_{n-k}\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

Soit A, B, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $CD = DC$ avec D inversible

1- Mq $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

L'idée principale c'est de multiplier la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ à droite par une matrice $\left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right)$ pour obtenir une matrice triangulaire au bloc $\left(\begin{array}{c|c} AD-BC & * \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$ de tel manière que $\det\left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) = 1$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} AP + BR & AQ + BS \\ CP + DR & CQ + DS \end{pmatrix}$$

Par identification :

$$\begin{cases} AD - BC = AP + BR \\ CP + DR = 0 \\ CQ + DS = I_n \end{cases}$$

on choisit $P = D$ et $R = -C$

dans ce cas $CP + DR = CD - DC = 0$

on a $CQ + DS = I_n$

on choisit $Q = 0$ et $S = D^{-1}$

on a $CQ + DS = I_n$

donc $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline -C & D^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AD-BC & * \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$

donc $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \times \det(D \times D^{-1})$

$= \det(AD - BC)$

or $\det(D \times D^{-1}) = 1$.

donc $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(AD - BC)$

2- Mq c'est faux en général si $DC \neq D$.

A, B, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $DC = CD$ et $D \in GL_n(\mathbb{R})$

On sait que dans ces conditions

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(AD - BC)$$

→ si D n'est pas inversible on montre que la dernière propriété persiste.

on considère $D_k = D - \frac{1}{k} I_n$

pour k assez grand, on a D_k inversible

comme D et C commutent

donc pour k assez grand

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D_k \end{array}\right) = \det(AD_k - BC)$$

on considère $f : \alpha \mapsto \det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D + \alpha I_n \end{array}\right)$

et $g : \alpha \mapsto \det((A(D + \alpha I_n) - BC)$

on a f et g sont continues en tout $\alpha \in \mathbb{R}$

en particulier en 0

alors on peut conclure $f(0) = g(0)$

d'où la relation

Scanné avec CamScanner

Exercice 9

on voit $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1- Mq les endomorphismes de $\mathbb{C}$ sont de la forme $f: z \mapsto az + b\bar{z}$, où $a, b \in \mathbb{C}$

On suppose que f est un endomorphisme dans $\mathbb{C}$ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f linéaire

une base de $\mathbb{C}$ est $(1, i)$

soit $z = Re(z) \times 1 + Im(z) i$

on a $f(z) = f(Re(z) \times 1 + Im(z) i)$

$= f(1) Re(z) + Im(z) f(i)$

$= \frac{z - z'}{2} f(1) + \frac{z - z'}{2i} f(i)$

$= \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(2i)}{2i}\right) z + \left(\frac{f(1)}{2} - \frac{f(1)}{2i}\right) \bar{z}$

on pose $\begin{cases} a = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(i)}{2i} \\ b = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(i)}{2i} \end{cases}$

d'où $f(z) = az + b\bar{z}$

Réciproquement

si $(\forall z \in \mathbb{C}) f(z) = az + b\bar{z}$

$f(\lambda z + \mu z') = a(\lambda z + \mu z') + b(\lambda \bar{z} + \mu \bar{z'})$

$= \lambda(az + b\bar{z}) + \mu(az' + b\bar{z'})$

$= \lambda f(z) + \mu f(z')$.

2- Calculer $\det(f)$ en fct de a et b

on sait que $(1, i)$ est une base dans $\mathbb{C}$

$f(1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b$.

$= Re(a+b) + i\, Im(a+b)$

$f(i) = a \times i + b \times (-i) = (a - b) i$

$= -Im(a-b) + i\, Re(a-b)$

$\begin{pmatrix} Re(a+b) & Im(a+b) \\ -Im(a+b) & Re(a-b) \end{pmatrix} = M_f$

(M_f : matrice associée à un endomorphisme f)

$\det(f) = Re(a-b) \times Re(a+b) - Im(a-b) Im(a+b)$.

$= (Re(a) + Re(b))(Re(a) - Re(b)) + (Im(a) - Im(b))(Im(a) + Im(b))$.

$= Re^2(a) - Re^2(b) + Im^2(a) - Im^2(b)$

$\det f = |a|^2 - |b|^2$

3- Donner une condition nécessaire pour que f soit un automorphisme

pour que f soit un endomorphisme il faut que f soit un endomorphisme bijectif

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

c'à d $z \mapsto az + b\bar{z}$.

ce qui implique $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$

c'à d $|a| \neq |b|$.

Exercice 10

soit $n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, c'à d une matrice carrée d'ordre n à coefficients entiers.

1- Expliquer pourquoi $\det(n) \in \mathbb{Z}$

$n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, n matrice carrée d'ordre n de coefficients entiers

$M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $m_{ij} \in \mathbb{Z}$

on sait que $\det(n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i), i}$

donc $\det(M)$ est la somme de produits

Scanné avec CamScanner

2) Mq $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \{-1, 1\}$

on suppose que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$

donc $\exists N \in GL_n(\mathbb{Z})$ tq $\det(MN) = 1$

c'à d $\det(M) \times \det(N) = 1$

d'où $\det(N) = \frac{1}{\det(M)}$

comme $\det M \in \mathbb{Z}$ alors

$\det(M) \in \{-1, 1\}$

3) Plus généralement, si A est un anneau commutatif et $M \in M_n(A)$ donner une condition nécessaire et suffisante sur $\det(M)$ pour que $M \in GL_n(A)$.

Si A est un anneau commutatif et $M \in M_n(A)$

$M \in GL_n(A) \Leftrightarrow \det(M) \in U_A$.

(ensemble des éléments inversibles dans l'anneau A)

Scanné avec CamScanner